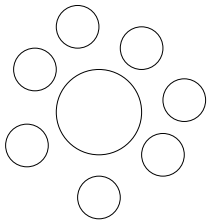
Feuille Semaine 3 - Worksheet Week 3 - MAT 9351

1. Soit $a(n)$ le nombre de façons de ranger n personnes dans des tables circulaires autour d'une piste de danse circulaire. Trouver la fonction génératrice exponentielle de $a(n)$ et trouver $a(n)$ pour $n = 1, \ldots, 5$.



2. Une involution est une permutation w tel que $w^2 = \iota$. Soit $i(n)$ le nombre d'involutions de taille n. Calculez $i(n)$ pour $n = 2, 3, 4$. Montrez que la série génératrice exponentielle pour le nombre d'involutions dans $\mathfrak{S}_n$ est $\exp(x + x^2/2)$.

3. Montrez les formules pour les spécialisation de $m_\lambda, p_\lambda, e_\lambda, f_\lambda$ (Prop. 7.8.3 [EC2]).

base b_λ	$\mathrm{ps}_n(b_\lambda)$	$\mathrm{ps}(b_\lambda)$	$\mathrm{ps}_n^1(b_\lambda)$
m_λ	pas propre	pas propre	$\binom{n}{\ell(\lambda)}\binom{\ell(\lambda)}{n_1(\lambda), n_2(\lambda), \ldots}$
p_λ	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{n\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}}$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}}$	$n^{\ell(\lambda)}$
e_λ	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} q^{\binom{\lambda_i}{2}} \begin{bmatrix} n \\ \lambda_i \end{bmatrix}_q$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{q^{\binom{\lambda_i}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\lambda_i})}$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \binom{n}{\lambda_i}$
h_λ	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \begin{bmatrix} n+\lambda_i-1 \\ \lambda_i \end{bmatrix}_q$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{\lambda_i})}$	$\displaystyle\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \binom{n+\lambda_i-1}{\lambda_i}$

4. A partir de $e_n = \sum_{\lambda \vdash n} \epsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda$ montrez que

$$p_n = \det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ne_n & e_{n-1} & e_{n-2} & \vdots & e_1 \end{pmatrix}$$